

$$S_{ABC} = \frac{1}{3}S_1 = \frac{1}{3}S_2. \quad (9)$$

Равенство легко получается из формул (7) и (8) при $m = n$. Данную ситуацию иллюстрирует рис. 5.

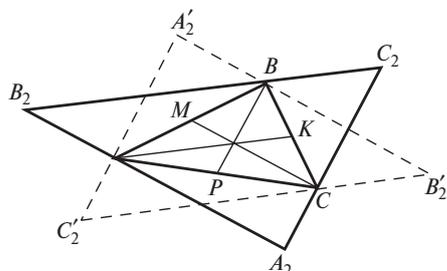


Рис. 5

Утверждение 4. Если точки M , K и P совпадают с серединами сторон треугольника ABC , то $S_1 = S_2$ и $S' = S''$.

Равенство $S_1 = S_2$ следует из (9), а из равенств (1), (2) и (9) получаем, что $S' = S''$.

Теперь легко определить границы изменения площадей S' , S'' , S_1 и S_2 при движении точек M , K и P по сторонам треугольника (M движется от A к B , K — от B к C , а P — от C к A). Когда эти точки приближаются к серединам соответствующих сторон треугольника ABC ($\frac{n}{m} \rightarrow 1$), S' и S_1 — монотонно убывают, а S'' и S_2 — монотонно возрастают. Кроме того, имеют место цепочки неравенств:

$$0 \leq S'' \leq \frac{2}{3}S_{ABC} \leq S' \leq S_{ABC},$$

$$S_{ABC} \leq S_2 \leq 3S_{ABC} \leq S_1 \leq 4S_{ABC}.$$

Заметим, что при движении точек M , K и P по сторонам треугольника ABC в обратном направлении, т.е. к вершинам A , B и C соответственно (в таком случае $m < n$), при переходе через середины сторон треугольника, величины S_1 и S_2 , S' и S'' меняются ролями. Другими словами, выявляется симметрия свойств этих величин относительно медиан треугольника ABC .

ВЕРОЯТНОСТЬ И ТРЕУГОЛЬНИКИ

П.В.Семенов
(Москва)

Всякий раз, когда при решении планиметрической задачи мне приходится рисовать произвольный остроугольный треугольник, я с удивлением (а иногда и с досадой) обнаруживаю, что получается совсем не произвольный треугольник. Чаще всего он или «почти что» прямоугольный, или «почти что» равнобедренный.

Во второй части этой статьи дана количественная оценка подобного эффекта. Оказывается, что вероятность события, состоящего в том, что один из острых углов треугольника близок к 90° с погрешностью в 10° или что два острых угла этого треугольника отличаются друг от друга менее чем на 10° , превышает 88%! В первой части этой статьи приведены необходимые технические сведения и рассмотрены похожие, но более простые (и известные факты): вероятность того, что после разламывания отрезка на три части из этих частей можно сложить треугольник и вероятность того, что произвольно взятый треугольник окажется остроугольным¹.

¹ Схема изложения тут практически совпадает с материалом § 22 учебника [1].

1. Подсчет геометрических вероятностей основан на следующем правиле.

Если площадь $S(A)$ фигуры A разделить на площадь $S(X)$ фигуры X , которая целиком содержит фигуру A , то получится вероятность того, что точка, случайно выбранная из фигуры X , окажется в фигуре A : $P = \frac{S(A)}{S(X)}$.

Аналогично поступают и с множествами на числовой прямой, и с пространственными телами. Только в этом случае площади следует заменить или на длины числовых множеств, или на объемы пространственных тел соответственно.

Следует подчеркнуть, что довольно мало численны задачи, в которых с самого начала известны и фигура X , и ее подфигура A . Так получается только в упражнениях на прямое использование приведенного правила. Значительно чаще встречаются задачи, в которых по условию задачи требуется первоначально построить X и A , а уже только после этого производить подсчеты площадей $S(X)$, $S(A)$ и соответствующей вероятности. Построение (нахождение) фигур X и A по текстовому условию задачи называется построением

математической модели данной задачи. Собственно, только после построения модели получается корректно сформулированная математическая задача. Рассмотрим пример, который встречается во многих пособиях и учебниках (для университетов) по теории вероятностей.

Пример 1. Отрезок случайным образом разрезают на три отрезка. Какова вероятность того, что из них можно сложить треугольник?

Построение модели. Пусть длина разрезаемого отрезка равна a . Пронумеруем отрезки деления слева направо и обозначим их длины, соответственно, x , y и z . Так как $x + y + z = a$, то $z = a - x - y > 0$. Значит, $x > 0$, $y > 0$ и при этом $x + y < a$. В координатной плоскости изобразим множество решений (рис. 1) системы трех неравенств:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < a, \end{cases}$$

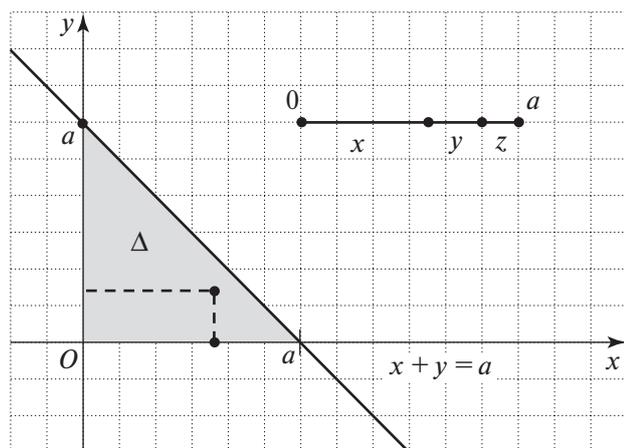


Рис. 1

Получим треугольник Δ с вершинами $(0; 0)$, $(a; 0)$, $(0; a)$ без учета его сторон. Каждому способу деления на три отрезка с длинами x , y и z поставим в соответствие точку (x, y) из треугольника. Тогда разным способам деления соответствуют разные точки треугольника Δ и при этом каждая точка $(x; y)$ треугольника соответствует некоторому способу деления. Действительно, произвольно выбрав $(x; y) \in \Delta$, мы однозначно зададим и деление на три отрезка: первый отрезок — это $[0; x]$, второй отрезок — это $[x, x + y]$, ну а третий отрезок — это $[x + y, a]$. Теперь вместо произвольных разбиений отрезка длины a на три подотрезка мы будем рассматривать произвольные

точки треугольника Δ . В этом и состоит построенная геометрическая модель. Итак, $X = \Delta$.

Решение задачи в построенной модели. Из трех отрезков длины x , y и z можно сложить треугольник, только если выполняются три неравенства треугольника:

$$\begin{cases} x + y > z \\ x + z > y \\ y + z > x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y > a - x - y \\ x + (a - x - y) > y \\ y + (a - x - y) > x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y > 0,5a \\ y < 0,5a \\ x < 0,5a. \end{cases}$$

Получается треугольник Δ_1 (рис. 2) с вершинами $(0,5a; 0)$, $(0; 0,5a)$, $(0,5a; 0,5a)$.

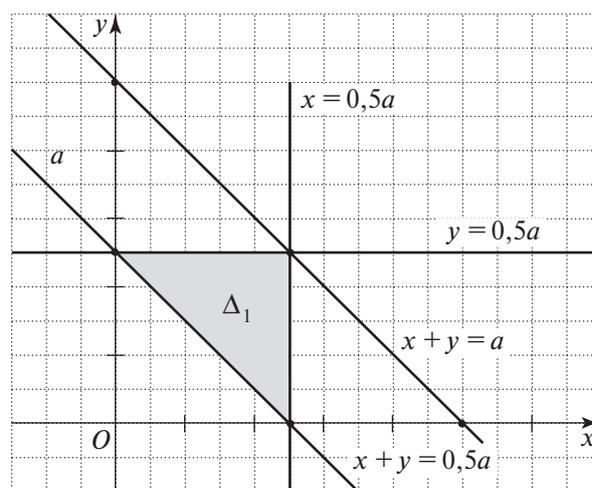


Рис. 2

Итак, $A = \Delta_1$.

Треугольник Δ_1 подобен треугольнику Δ с коэффициентом подобия $0,5$. Значит, его площадь составляет четверть площади треугольника Δ . Поэтому при случайном выборе точки из треугольника Δ вероятность того, что она окажется в меньшем треугольнике Δ_1 , равна

$$P = \frac{S(A)}{S(X)} = \frac{S(\Delta_1)}{S(\Delta)} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Попадание выбранной из Δ точки в треугольник Δ_1 (по построению модели) соответствует тем случаям, когда из трех частей можно сложить треугольник. Значит, вероятность того, что при случайном разрезании отрезка на три части получатся стороны некоторого треугольника, равна $0,25$.

О т в е т: $0,25$.

Рассмотрим еще один пример, связанный с предварительным построением геометрической модели исходной ситуации. Вот неформальный вопрос: *каких треугольников больше: остроуголь-*

ных или тупоугольных? Термин «больше» неясно, что тут обозначает. Ведь и множество всех остроугольных, и множество всех тупоугольных треугольников бесконечно. Более того, можно доказать, что между этими множествами имеется взаимнооднозначное соответствие (обычно такого рода утверждения доказывают на III курсе математических факультетов университетов). Переформулируем вопрос. *Что более вероятно: то, что произвольно построенный треугольник окажется остроугольным или же то, что он окажется тупоугольным?* Такая постановка вопроса тоже не слишком корректна, так как неясно, как собственно следует подсчитывать такие вероятности, т.е. не предъявлено никакой математической модели. Сначала, все же, попробуем ответить на вопрос неформально.

Будем рисовать углы треугольника по очереди. Первый угол с одинаковой вероятностью будет или острым, или тупым. Если он тупой, то и треугольник будет тупоугольным. А вот если он острый, то для следующего, второго, угла треугольника опять есть две возможности: он может быть или острым, или тупым (рис. 3). Правда, не очень ясно будут ли эти возможности *равновозможными*.

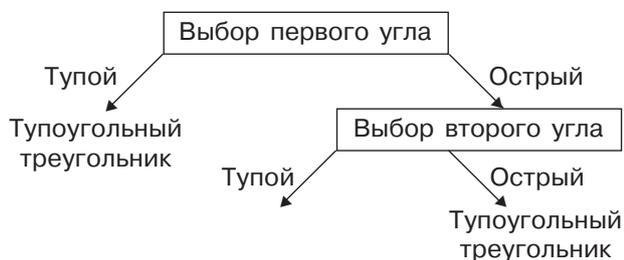


Рис. 3

Но, в любом случае, на интуитивном уровне получается, что тупоугольные треугольники (при произвольном выборе) встречаются чаще остроугольных. Перед тем, как переходить к корректно поставленной задаче, обсудим еще два обстоятельства.

Во-первых, куда-то делись прямые углы. Попробуем объяснить этот факт. Допустим, что из отрезка $[0; 180]$ случайно выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно в точности равно 90 ? Так как длина одноточечного множества $A = \{90\}$ равна нулю, то по формуле для геометрических вероятностей получаем $P = \frac{\text{длина}(A)}{\text{длина}(X)} = \frac{0}{180} = 0$. Значит, учет (или неучет) прямых углов не скажется на остальных вероятностях.

Во-вторых, в реальной практике мы все же значительно чаще рисуем острые, нежели тупые, углы и по этой причине чаще имеем дело с остроугольными, нежели тупоугольными треугольниками. Дело тут в психологии. Хотя, формально, при выборе первого угла нет никаких предпочтений для острых или для тупых углов, в реальности, мы, следуя многолетней привычке, чаще рисуем именно острый угол. Поэтому равновозможность двух вариантов при выборе первого угла есть лишь модель реальной ситуации. Это простейшая модель, но именно ее простота и позволяет провести достаточно несложные вычисления. Для сравнения: представьте, что мы принялись бы оценивать, насколько чаще выбирают острый угол, по сравнению с тупым. Кто именно выбирает, в какой ситуации выбирает, при ответе на какой вопрос выбирает и т.д., и т.п. Тут возникает жуткое количество дополнительных вопросов, с совершенно неясными ответами. Так что давайте ограничимся той моделью, в которой хоть что-то содержательное можно посчитать.

Пример 2. Случайным образом нарисовали треугольник. Какова вероятность того, что он является остроугольным?

Построение модели. Так как размеры треугольника не важны, то можно работать только с углами. Так как сумма углов треугольника равна 180° , то переформулируем задачу следующим образом: «Число 180 случайным образом разложили в сумму трех положительных слагаемых. Какова вероятность того, что все слагаемые меньше 90 ?»

Отличие от предыдущего примера состоит в том, что слагаемые не упорядочены. Неясно, какой из углов первый, а который из них – третий. Разберемся сначала с треугольниками, у которых нет двух равных углов. Пусть $0 < x < y < z$ – упорядоченная по возрастанию тройка (величин) углов. Тогда $x + y + z = 180$, $z = 180 - x - y$. В координатной плоскости изобразим множество решений (рис. 4) системы трех неравенств:

$$\begin{cases} 0 < x \\ x < y \\ y < 180 - x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \\ x < y \\ x + 2y < 180. \end{cases}$$

Получим треугольник Δ с вершинами $O(0; 0)$, $A(0; 90)$, $B(60; 60)$ без учета его сторон. Каждая его точка $(x; y)$ однозначно «отвечает» за треугольник с углами в x , y , $180 - x - y$ градусов. Итак, вместо разбиений 180 на три слагаемых мы будем рассматривать точки треугольника OAB . В этом и состоит построенная геометрическая

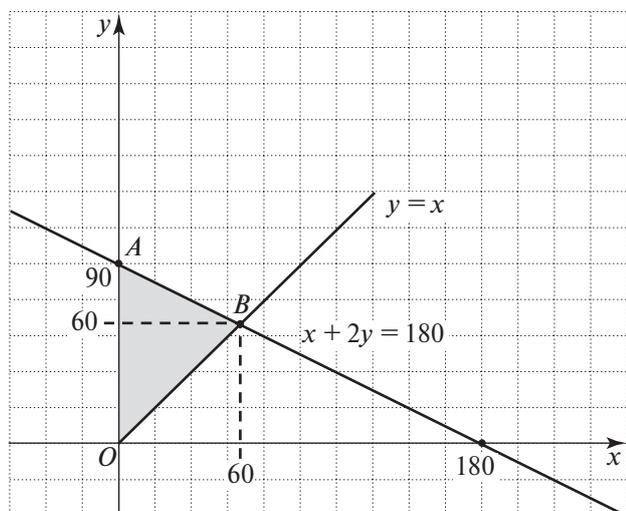


Рис. 4

модель. Заметим, что от добавления стороны, соединяющей вершины $(0; 0)$ и $(60; 60)$ площадь не изменится. Значит, можно считать, что случай $x = y$ также учтен в нашей модели. Аналогично и со случаем $y = z$, т.е. со стороной, соединяющей вершины $(0; 90)$ и $(60; 60)$.

Решение задачи в построенной модели. Отметим в нашей модели точки, соответствующие остроугольным треугольникам. Для этого следует решить систему неравенств

$$\begin{cases} x < y < 90 \\ y < 180 - x - y < 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < y < 90 \\ x + 2y < 180 \\ x + y > 90. \end{cases}$$

Получается треугольник Δ_1 (рис. 5) с вершинами $A(0; 90)$, $B(60; 60)$, $C(45; 45)$.

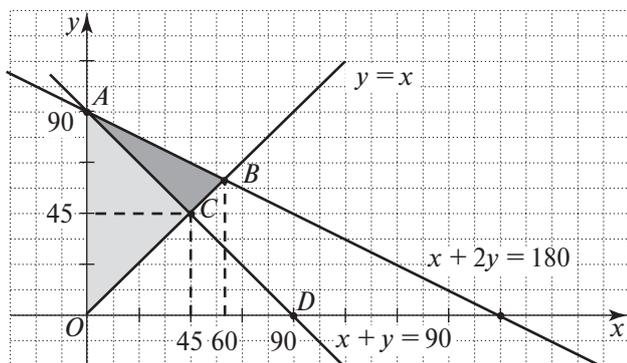


Рис. 5

Так как $AC \perp OB$ и $CB = 0,25OB$, то S_{ABC} составляет четверть площади S_{OAB} . Поэтому при случайном выборе точки из треугольника OAB ве-

роятность того, что она окажется в меньшем треугольнике ABC , равна $0,25$.

О т в е т: $0,25$.

Итак, получился довольно неожиданный результат: остроугольных треугольников «в три раза меньше», чем тупоугольных, который, кстати, полностью согласуется с интуитивным решением (см. рис. 3).

2. В этой части ограничимся только остроугольными треугольниками. В модели, построенной в примере 2, это означает, что мы будем произвольно выбирать точки только из треугольника ABC (см. рис. 5). Для удобства формулировок введем специальное обозначение.

Определение. Пусть $0 < \alpha < 30$. Остроугольный треугольник называется:

- « α – прямоугольным», если один из его углов больше $90 - \alpha$ градусов;
- « α – равнобедренным», если в нем есть два угла, которые отличаются друг от друга менее чем на α градусов.
- « α – хорошим», если он или « α – прямоугольный», или « α – равнобедренный».
- « α – очень хорошим», если он и « α – прямоугольный», и « α – равнобедренный».

Теорема. Вероятность того, что случайным образом выбранный остроугольный треугольник окажется:

- « α – прямоугольным» равна $\frac{\alpha}{15} - \frac{\alpha^2}{900}$;
- « α – равнобедренным» также равна $\frac{\alpha}{15} - \frac{\alpha^2}{900}$;
- « α – хорошим» равна $\frac{2\alpha}{15} - \frac{\alpha^2}{225}$;
- « α – очень хорошим» равна $\frac{\alpha^2}{450}$.

Доказательство. а) Меньший угол x треугольника всегда не больше 60° . Так как $0 < \alpha < 30$, то неравенство $x > 90 - \alpha$ невозможно. Если второй по величине угол y больше $90 - \alpha$, то и $z > y > 90 - \alpha$. Значит, событие, состоящее в том, что один из углов треугольника больше $90 - \alpha$ совпадает с событием, состоящим в том, что $z > 90 - \alpha$.

Проведем «граничные» прямые, соответствующие случаям $y = 90 - \alpha$ или $z = 180 - x - y = 90 - \alpha$, т.е. проведем прямые $y = 90 - \alpha$ и $x + y = 90 + \alpha$.

Прямые $x + y = 90$ и $y = 90 - \alpha$ пересекаются в точке $B'(\alpha; 90 - \alpha)$, прямые $y = x$ и $x + y = 90 + \alpha$ пересекаются в точке $D(45 + 0,5\alpha; 45 + 0,5\alpha)$, а три прямые $y = 90 - \alpha$, $x + 2y = 180$, и $x + y = 90 + \alpha$ пересекаются в точке $D'(2\alpha; 90 - \alpha)$

(рис. 6). Следует найти площадь трапеции $ABDD'$. Для этого найдем площадь треугольника CDD' . Он подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия, равным

$$\frac{CD}{BC} = \frac{x_C - x_D}{x_C - x_B} = \frac{60 - (45 + 0,5\alpha)}{60 - 45} = \frac{15 - 0,5\alpha}{15} = 1 - \frac{\alpha}{30}.$$

$$S_{CDD'} = \left(1 - \frac{\alpha}{30}\right)^2 S_{ABC}, S_{ABDD'} = \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{30}\right)^2\right) S_{ABC},$$

$$P = \frac{S_{ABDD'}}{S_{ABC}} = \frac{\alpha}{15} - \frac{\alpha^2}{900}.$$

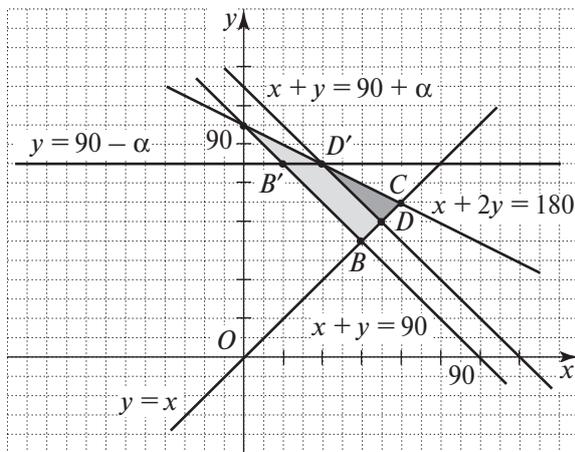


Рис. 6

б) Отличие двух меньших углов друг от друга менее чем на α соответствует неравенству $y < x + \alpha$. Обозначим это событие A_{12} . Отличие двух больших углов друг от друга менее, чем на α соответствует неравенству $y > 180 - x - y - \alpha$, т.е. $x + 2y > 180 - \alpha$. Обозначим это событие A_{23} . Если x и $z = 180 - x - y$ отличаются менее чем на α , то обязательно произойдет или A_{12} , или A_{23} . Значит, событие, состоящее в том, что два угла отличаются менее чем на α происходит тогда и только тогда, когда происходит или A_{12} , или A_{23} .

Проведем «границные» прямые $y = x + \alpha$ и $x + 2y = 180 - \alpha$. Получим точки

$$B'(45 - 0,5\alpha; 45 + 0,5\alpha), B''(\alpha, 90 - \alpha),$$

$$F\left(60 - \frac{\alpha}{3}; 60 - \frac{\alpha}{3}\right), F'(60 - \alpha; 60) \text{ (рис. 7)}.$$

Аналогично случаю а),

$$\frac{B'F'}{BC} = \frac{(60 - \alpha) - (45 - 0,5\alpha)}{60 - 45} = \frac{15 - 0,5\alpha}{15} = 1 - \frac{\alpha}{30}.$$

Значит,

$$S_{B'B'F'} = \left(1 - \frac{\alpha}{30}\right)^2 S_{ABC}, S_{ABC} - S_{B'B'F'} =$$

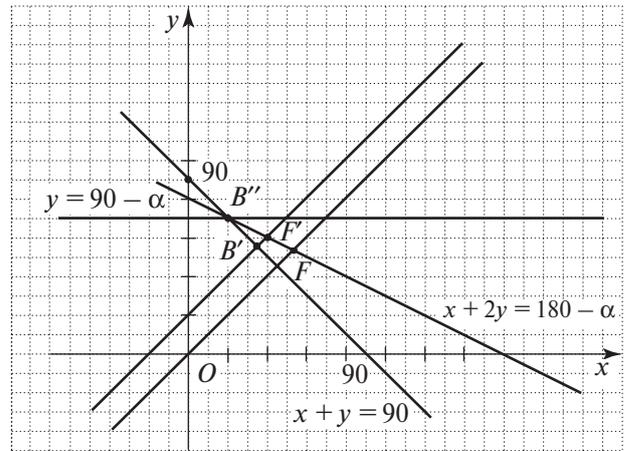


Рис. 7

$$= \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{30}\right)^2\right) S_{ABC}, P = \frac{\alpha}{15} - \frac{\alpha^2}{900}.$$

в) Тут требуется найти вероятность того, что произойдет одно из двух событий: либо треугольник окажется « α – прямоугольным», либо он окажется « α – равнобедренным». Для этого следует совместить рис. 6 и 7. Пусть G – точка пересечения прямых $y = x + \alpha$ и $x + y = 90 + \alpha$. Тогда

$$G(45; 45 + \alpha),$$

$$\frac{GF'}{BC} = \frac{(60 - \alpha) - 45}{60 - 45} = 1 - \frac{\alpha}{15}$$

и

$$P = \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{15}\right)^2\right) = \frac{2\alpha}{15} - \frac{\alpha^2}{225}.$$

г) При решении воспользуемся следующим утверждением: *вероятность наступления хотя бы одного из двух событий в сумме с вероятностью одновременного наступления обоих этих событий равна сумме вероятностей этих событий*. На языке теории вероятностей этот факт записывается так:

$$P(A + B) + P(AB) = P(A) + P(B).$$

В нашем случае,

$$P(A) = P(B) = \frac{\alpha}{15} - \frac{\alpha^2}{900}, P(A + B) = \frac{2\alpha}{15} - \frac{\alpha^2}{225}.$$

Значит,

$$P(AB) = 2\left(\frac{\alpha}{15} - \frac{\alpha^2}{900}\right) - \left(\frac{2\alpha}{15} - \frac{\alpha^2}{225}\right) = \frac{\alpha^2}{450}.$$

Теорема доказана.

Приведем примеры конкретных подсчетов.

α	$\frac{2\alpha}{15}$	$\frac{\alpha^2}{225}$	Вероятность появления « α – хорошего» треугольника
4	0,5(3)	0,07(1)	0,46(2)
5	0,6(6)	0,1(1)	$0,5(5) = \frac{5}{9}$
10	1,3(3)	0,4(4)	$0,8(8) = \frac{8}{9}$

Литература

Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала анализа. Профильный уровень. Часть I. Учебник. – М.: Мнемозина, 2007.